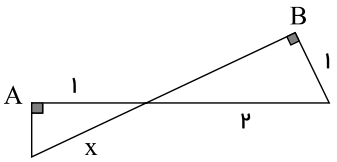
نام آزمون: ریاضی ۱۱ تجربی

تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۰۹/۲۶

سروش هدایت

۹۱ - در شکل مقابل دو زاویهٔ A و B قائمه‌اند. مقدار x چقدر است؟

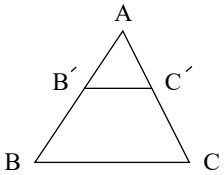


① $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ② $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$ ③ $\frac{۴}{۳}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

۹۲ - اگر $\frac{۲a+۳b}{۳a+۲b}=\frac{۵}{۶}$ ، حاصل $\frac{a}{b}$ چقدر است؟

① $\frac{۳}{۴}$ ② $\frac{۴}{۳}$ ③ $\frac{۳}{۸}$ ④ $\frac{۸}{۳}$

۹۳ - در شکل زیر $BC \parallel B'C'$ و $AB=۱۰cm$ و $AB'=۳cm$، AC' چند برابر CC' است؟



① $\frac{۳}{۱۰}$ ② $\frac{۴}{۱۰}$ ③ $\frac{۳}{۷}$ ④ $\frac{۷}{۱۰}$

۹۴ - اگر $۲a+\sqrt{۳a+۱۶}=۱$ باشد، عدد $۴a+۹$، کدام است؟

① ۴ ② ۶ ③ ۱۵ ④ ۲۱

۹۵ - اگر $x^۲+x<۰$ باشد، حاصل $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ کدام است؟

① -۲ ② -۱ ③ ۰ ④ ۱

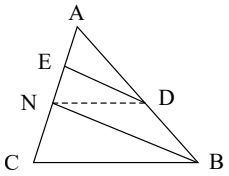
۹۶ - تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x^۲-ax+b}$ مفروض است. اگر دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}-\{۱\}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

① ۴ ② ۳ ③ ۲ ④ ۱

۹۷ - جواب معادله‌ی $[۳x-۲]=-۴$ کدام است؟ (نماد [ ]، جزء صحیح است.)

① $[-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳})$ ② $(-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳}]$ ③ $(-۱,-\frac{۲}{۳}]$ ④ $[-۱,-\frac{۲}{۳})$

۹۸ - در شکل مقابل $DE \parallel BN$ و $DN \parallel BC$ و $AE=۴$ و $EN=۶$ ، اندازه‌ی AC کدام است؟



① ۱۸ ② ۲۰ ③ ۲۴ ④ ۲۵

۹۹ - وارون تابع $f(x)=x^۲-۲x+۲\,,\,x\le ۱$ کدام گزینه می‌باشد؟

① $۱+\sqrt{x-۱}$ ② $۱-\sqrt{x-۱}$ ③ $۱+\sqrt{۱-x}$ ④ $۱-\sqrt{۱-x}$

۱۰۰ - مقادیر مجاز برای ورودی تابع $g(x)=\frac{۴}{[x]+[-x]}$ کدام است؟

① $\mathbb{R}$ ② $\mathbb{Z}$ ③ $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ④ $\mathbb{R}\ge ۰$

۱۰۱ - جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{۲x+۵}-۲x=۵$ چگونه است؟

① یک ریشه‌ی منفی ② دو ریشه‌ی منفی ③ دو ریشه‌ی مثبت ④ یک ریشه‌ی منفی و یک ریشه‌ی مثبت

۱۰۲- دامنه‌ی تعریف تابع $y = \dfrac{x}{[x]+۱}$ کدام است؟

① $\mathbb{R}-[-۱,۰)$ ② $\mathbb{R}-(-۱,۰)$ ③ $\mathbb{R}-(-۱,۰]$ ④ $\mathbb{R}-[۰,۱]$

۱۰۳- اگر تابع وارون‌پذیر باشد و $f(۳)=۷$ و $f^{-۱}(\dfrac{۳a-۱}{۲})=۳$ آنگاه $f(a-۲)$ کدام است؟ $(a\in\mathbb{R})$

① ۵ ② ۷ ③ ۳ ④ -۳

۱۰۴- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۲x-۴}{۳x^۲+۲ax+b}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ باشد، آنگاه $f(a-b)$ کدام است؟

① $\dfrac{۱}{۳۰}$ ② $-\dfrac{۱}{۳۰}$ ③ $\dfrac{۱}{۴۸}$ ④ $-\dfrac{۱}{۴۸}$

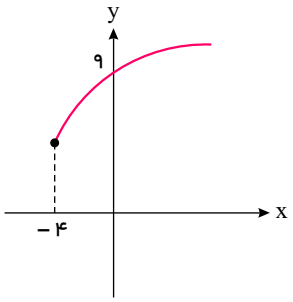
۱۰۵- بزرگترین ریشه‌ی معادله‌ی $\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۱}=\dfrac{۵}{۲x-۱}+۵$ کدام است؟

① $\dfrac{۱}{۴}$ ② $\dfrac{۳}{۲}$ ③ $\dfrac{۱}{۸}$ ④ -۲

۱۰۶- به ازای چند مقدار m رابطهٔ $f=\{(۲,m^۳-m),(۳,m+۱),(m,۲),(۲,۰),(m^۲,۲m)\}$ تابعی یک به یک است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

۱۰۷- اگر نمودار تابع $y=۲\sqrt{x-a}+b$ به شکل روبه‌رو باشد، برد این تابع کدام مجموعه است؟



① $[۳,+\infty)$

② $[۵,+\infty)$

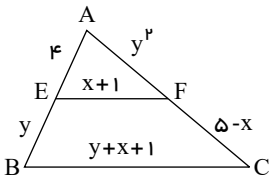
③ $[۰,+\infty)$

④ $[۶,+\infty)$

۱۰۸- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{۲x+۱}=۲+\sqrt{x-۳}$ کدام است؟

① ۱۶ ② ۱۸ ③ ۲۰ ④ ۲۲

۱۰۹- در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y-۲x$ کدام است؟



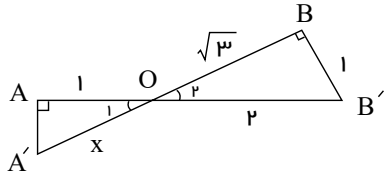
① -۴ ② -۲ ③ ۲ ④ ۴

۱۱۰- اگر تابع خطی f محورهای مختصات را در نقاط $(۰,۴)$ و $(۳,۰)$ قطع کند. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf^{-۱}(x)}$ کدام است؟

① $[۰,۳]$ ② $[۳,۴]$ ③ $[۰,۴]$ ④ $[۴,+\infty)$

پاسخنامه تشریحی

۹۱ - گزینه ۲ ابتدا با رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ OB را به‌دست می‌آوریم.



$$OB=\sqrt{۴-۱}=\sqrt{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱=\hat{O}_۲\\ \hat{A}=\hat{B}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AOA'}\sim \overset{\Delta}{OBB'}$$

$$\Rightarrow \frac{AA'}{BB'}=\frac{A'O}{OB'}=\frac{AO}{OB}\Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow x=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۹۲ - گزینه ۴ با طرفین وسطین کردن کسر داده شده داریم:

$$۶(۲a+۳b)=۵(۳a+۲b)\Rightarrow ۱۲a+۱۸b=۱۵a+۱۰b\Rightarrow ۸b=۳a\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۸}{۳}$$

۹۳ - گزینه ۳

$$BC'\parallel BC\Rightarrow \frac{AB'}{BB'}=\frac{AC'}{CC'}\Rightarrow \frac{۳}{۷}=\frac{AC'}{CC'}\Rightarrow AC'=\frac{۳}{۷}CC'$$

۹۴ - گزینه ۱

$$۲a+\sqrt{۳a+۱۶}=۱\rightarrow \sqrt{۳a+۱۶}=۱-۲a\xrightarrow{\text{توان ۲}}۳a+۱۶=۱+۴a^۲-۴a$$

$$\rightarrow ۴a^۲-۷a-۱۵=۰\xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac=۴۹+۲۴۰=۲۸۹}\begin{cases}a=\dfrac{۷+۱۷}{۸}=۳\ (\text{در معادله صدق نمی‌کند})\ \text{غ‌ق‌ق}\\ a=\dfrac{۷-۱۷}{۸}=\dfrac{-۵}{۴}\ \text{ق‌ق}\end{cases}$$

پس : $۴a+۹=۴(\frac{-۵}{۴})+۹=۴$

۹۵ - گزینه ۱ اگر $x^۲+x<۰$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $-۱<x<۰$ است.

$$x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -۱ & & ۰ & & +\infty \\ \hline \text{عبارت}<۰ & & + & ۰ & - & ۰ & + & \end{array}\Rightarrow -۱<x<۰$$

حال برای تعیین حاصل $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ کافی است حدود عبارت‌های داخل جزء صحیح را مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{cases}-۱<x<۰\Rightarrow [x]=-۱\\ -۱<x<۰\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}۰<x^۲<۱\Rightarrow [x^۲]=۰\\ -۱<x<۰\xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم}}-۱<x^۳<۰\Rightarrow [x^۳]=-۱\\ -۱<x<۰\xrightarrow{\text{به توان ۴ می‌رسانیم}}۰<x^۴<۱\Rightarrow [x^۴]=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow [x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=(-۱)+۰+(-۱)+۰=-۲$$

۹۶ - گزینه ۲ عدد ۱ ریشهٔ مخرج است و مخرج ریشهٔ دیگری ندارد. پس مخرج به‌صورت $(x-۱)^۲$ است.

$$(x-۱)^۲=x^۲-۲x+۱=x^۲-ax+b\Rightarrow a=۲\ ,\ b=۱$$

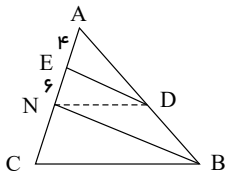
پس $a+b=۳$ است.

۹۷ - گزینه ۱

$$[۳x-۲]=-۴\Rightarrow [۳x]-۲=-۴\Rightarrow [۳x]=-۲$$

در نتیجه $-۲\le ۳x<-۱$ پس $\frac{-۲}{۳}\le x<\frac{-۱}{۳}$ یا بازه‌ی $[-\frac{۲}{۳}\ ,\ -\frac{۱}{۳})$ جواب معادله است.

۹۸ - گزینه ۴



$$ED\parallel NB\Rightarrow \frac{AE}{AN}=\frac{AD}{AB}(۱)$$

$$ND\parallel BC\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AN}{AC}(۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{AE}{AN}=\frac{AN}{AC}$، پس:

$$\frac{۴}{۱۰}=\frac{۱۰}{AC}\Rightarrow AC=۲۵$$

۹۹ - گزینه ۲ قدم اول تبدیل تابع به فرم مربع کامل می‌باشد

$$f(x)=x^۲-۲x+۲\to y=(x-۱)^۲+۱\to x\le ۱\xrightarrow{\text{وارون}}x=(y-۱)^۲+۱\quad y\le ۱$$

$$\to x-۱=(y-۱)^۲\to |y-۱|=\sqrt{x-۱}$$

حال باتوجه به شرط $y\le ۱$ عبارت درون قدر مطلق عبارتی منفی می‌باشد:

$$-y+۱=\sqrt{x-۱}\to y=۱-\sqrt{x-۱}=f^{-۱}(x)$$

۱۰۰ - گزینه ۳

می‌دانیم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

مخرج کسر نباید صفر باشد پس:

$$D_g=\mathbb{R}-\{\text{ریشه یا ریشه‌های مخرج}\}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$$

۱۰۱ - گزینه ۲

$$\sqrt{۲x+۵}=۵+۲x\xrightarrow{\text{توان ۲}}۲x+۵=۴x^۲+۲۰x+۲۵\to ۴x^۲+۱۸x+۲۰=۰$$

$$\to ۲x^۲+۹x+۱۰=۰\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۸۱-۸۰=۱\to x=\frac{-۹\pm ۱}{۴}=-۲\ ,\ -\frac{۵}{۲}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا در معادله‌ی اصلی (اولیه) صدق می‌کنند.

۱۰۲ - گزینه ۱

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow [x]+۱=۰\Rightarrow [x]=-۱\Rightarrow -۱\le x<۰\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[-۱,۰)$$

۱۰۳ - گزینه ۲

اگر $A\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ روی تابع f باشد $A'\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.$ روی تابع $f^{-۱}$ قرار دارد. یعنی: $f(a)=b\leftrightarrow f^{-۱}(b)=a$

باتوجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$f(۳)=۷\to A(۳,۷)\to A'(۷,۳)\in f^{-۱}$$

$$\left.\begin{matrix}f^{-۱}(۷)=۳\\ f(\frac{۳a-۱}{۲})=۳\end{matrix}\right\}\frac{۳a-۱}{۲}=۷\to ۳a-۱=۱۴\to a=۵$$

$$f(a-۲)\overset{a=۵}{=\!=\!=}f(۳)=۷$$

۱۰۴ - گزینه ۲ چون $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$ می‌باشد، عبارت درجه دوم مخرج کسر باید ریشهٔ مضاعف ۳ داشته باشد، بنابراین داریم:

$$۳(x-۲)^۲=۳x^۲+۲ax+b\Rightarrow ۳x^۲-۱۲x+۱۲=۳x^۲+۲ax+b\Rightarrow\begin{cases}a=-۶\\ b=۱۲\end{cases}\Rightarrow a-b=-۱۸$$

$$f(x)=\frac{۲x-۴}{۳(x-۲)^۲}=\frac{۲}{۳(x-۲)}\Rightarrow f(-۱۸)=\frac{۲}{۳x(-۲۰)}=-\frac{۱}{۳۰}$$

۱۰۵ - گزینه ۳

$$\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۱}=\frac{۵}{۲x-۱}+۵\to\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x+۱)(x-۱)}=\frac{۵+۱۰x-۵}{۲x-۱}\to\frac{x-۲}{x+۱}=\frac{۱۰x}{۲x-۱}$$

$$\to ۲x^۲-x-۴x+۲=۱۰x^۲+۱۰x\to ۸x^۲+۱۵x-۲=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۲۲۵+۶۴=۲۸۹\Rightarrow x_۱=\frac{-۱۵+۱۷}{۱۶}=\frac{۱}{۸}\quad x_۲=\frac{-۱۵-۱۷}{۱۶}=-۲$$

ریشه‌ی بزرگتر، $x=\frac{۱}{۸}$ است.

۱۰۶ - گزینه ۴ برای اینکه f تابع باشد باید:

$$\begin{cases}(۲,m^۳-m)\in f\\ (۲,۰)\in f\end{cases}\Rightarrow m^۳-m=۰\Rightarrow m(m^۲-۱)=۰\Rightarrow m=۰,m=\pm ۱$$

اگر $m=۰$ آن‌گاه:

f تابع نیست، $f=\{(۲,۰),(۳,۱),(۰,۲),(۰,۰)\}$

اگر $m=۱$ آن‌گاه:

f تابعی یک به یک نیست، $f=\{(۲,۰),(۳,۲),(۱,۲)\}$

اگر $m=-1$ آن‌گاه:

$f, f=\{(2,0),(3,0),(-1,2),(1,-2)\}$ تابعی یک به یک نیست

پس هیچ مقدار m ای وجود ندارد که f تابعی یک به یک باشد.

۱۰۷ - گزینه ۲ اول: دامنهٔ تابع با توجه به نمودار داده شده $[-4,+\infty)$ است. همچنین از روی ضابطه دامنهٔ تابع $x\geq a$ است. پس $a=-4$. بنابراین ضابطه تابع به شکل $y=2\sqrt{x+4}+b$ است.

دوم: عرض از مبدأ تابع ۹ است.

$$y=2\sqrt{x+4}+b\xrightarrow{x=0}y=4+b=9\Rightarrow b=5$$

پس ضابطهٔ تابع به شکل $y=2\sqrt{x+4}+5$ است و برد آن $[5,+\infty)$ است. چون:

$$2\sqrt{x+4}\geq 0\Rightarrow 2\sqrt{x+4}+5\geq 5\Rightarrow y\geq 5$$

۱۰۸ - گزینه ۱

$$\sqrt{2x+1}=2+\sqrt{x-3}\xrightarrow{\text{توان ۲}}2x+1=4+x-3+4\sqrt{x-3}$$
$$\to x=4\sqrt{x-3}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^2=16(x-3)\to x^2=16x-48$$
$$\to x^2-16x+48=0\to(x-12)(x-4)=0\to\begin{cases}x=12 & \text{ق ق}\\ x=4 & \text{ق ق}\end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر ۱۶ می‌باشد.

۱۰۹ - گزینه ۱ از قضیهٔ عکس تالس کمک می‌گیریم:

$$BC||EF\xrightarrow{\text{جزء به کل}}\frac{4}{4+y}=\frac{x+1}{y+x+1}=\frac{y^2}{y^2+5-x}$$

تساوی اول را حل می‌کنیم که ساده‌تر است.

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}4y+4x+4=4x+4+xy+y\Rightarrow 3y=xy\Rightarrow x=3$$

برای ساده‌تر بودن محاسبات از جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow\frac{4}{y}=\frac{y^2}{5-x}\xrightarrow{x=3}8=y^3\Rightarrow y=2$$
$$\text{بنابراین}:\ y-2x=2-2(3)=-4$$

۱۱۰ - گزینه ۳ ضابطهٔ $f(x)$ و از آن $f^{-1}(x)$ را بیابید و در تابع خواسته شده جایگذاری کنید.

راه‌حل اول:

اول: تابعی که از نقاط $(0,4)$ و $(3,0)$ بگذرد، معادلهٔ آن به شکل زیر است.

$$m=\frac{4-0}{0-3}=-\frac{4}{3}\Rightarrow y-0=-\frac{4}{3}(x-3)\Rightarrow y=-\frac{4}{3}x+4$$

دوم: برای پیدا کردن f^{-1} جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$x=-\frac{4}{3}y+4\Rightarrow x-4=-\frac{4}{3}y\Rightarrow y=-\frac{3}{4}(x-4)=-\frac{3}{4}x+3$$

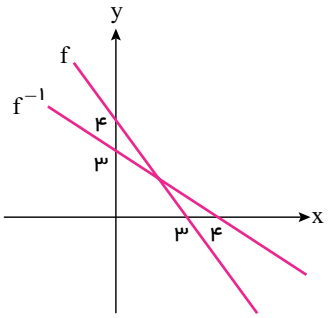
سوم: جایگذاری در تابع $y=\sqrt{xf^{-1}(x)}$

$$y=\sqrt{x(-\frac{3}{4}x+3)}\xrightarrow{D}x(-\frac{3}{4}x+3)\geq 0\Rightarrow 0\leq x\leq 4$$

راه‌حل دوم:

اول: تابع f به شکل روبه‌رو است. از آن f^{-1} را هم رسم می‌کنیم.

برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf^{-1}(x)}$ کافیست مقادیری از x را بیابیم که هر دو مقدار x و $f^{-1}(x)$ مثبت یا صفر و یا هر دو مقدار x و $f^{-1}(x)$ منفی باشند. یعنی بخشی از تابع که در ناحیهٔ اول یا سوم قرار دارد، پس $[0,4]$ صحیح است.


y
f
f^{-1}
۴
۳
x
۳
۴

پاسخنامه کلیدی

۹۱ - ۲	۹۴ - ۱	۹۷ - ۱	۱۰۰ - ۳	۱۰۳ - ۲	۱۰۶ - ۴	۱۰۹ - ۱
۹۲ - ۴	۹۵ - ۱	۹۸ - ۴	۱۰۱ - ۲	۱۰۴ - ۲	۱۰۷ - ۲	۱۱۰ - ۳
۹۳ - ۳	۹۶ - ۲	۹۹ - ۲	۱۰۲ - ۱	۱۰۵ - ۳	۱۰۸ - ۱	